

2024 秋季初三数学每日一题打卡 013

013 试题来源:2022 苏州市工业园区二模试题

定义:若一个函数的图象上存在横、纵坐标之和为零的点,则称该点为这个函数图象的“好点”. 例如,点 $(-1,1)$ 是函数 $y = x + 2$ 的图象的“好点”.

(1) 在函数① $y = -x + 3$, ② $y = \frac{3}{x}$ ③ $y = x^2 + 2x + 1$ 的图象上,存在“好点”的函数是_____;(填序号)

(2) 设函数 $y = -\frac{4}{x} (x < 0)$ 与 $y = kx + 3$ 的图象的“好点”分别为点 A 、 B ,过点 A 作 $AC \perp y$ 轴,垂足为 C . 当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,求 k 的值;

(3) 若将函数 $y = x^2 + 2x$ 的图象在直线 $y = m$ 下方的部分沿直线 $y = m$ 翻折,翻折后的部分与图象的其余部分组成了一个新的图象. 当该图象上恰有 3 个“好点”时,求 m 的值.

试题解析:

(1) 在函数① $y = -x + 3$, ② $y = \frac{3}{x}$ ③ $y = x^2 + 2x + 1$ 的图象上, 存在“好点”的函数是__③__;(填序号)

解: (1) $\because y = -x + 3, \therefore y + x = 3, \therefore$ ①不是“好点”的函数,

$\because y = \frac{3}{x}, x > 0, \therefore xy = 3 > 0 \therefore x + y \neq 0, \therefore$ ②不是“好点”的函数,

$\therefore \begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ x + y = 0 \end{cases}, \therefore x^2 + 3x + 1 = 0, \therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 > 0, \therefore$ 方程组有解,

\therefore ③是“好点”的函数, 故答案为: ③;

(2) 设函数 $y = -\frac{4}{x} (x < 0)$ 与 $y = kx + 3$ 的图象的“好点”分别为点 A, B , 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴, 垂足为 C . 当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, 求 k 的值;

(2) $\because \begin{cases} y = -\frac{4}{x} \\ x + y = 0 \end{cases}, x < 0, \therefore \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}, \therefore A(-2, 2),$

如图,

当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, $AB = AC = 2$ 或 $BA = BC$,

当 $AB = AC$ 时,

$\because y = -x, \therefore B(x, -x),$

$\therefore (x+2)^2 + (-x-2)^2 = 2^2, \therefore x_1 = \sqrt{2} - 2, x_2 = -\sqrt{2} - 2,$

当 $x = \sqrt{2} - 2$ 时, $y = -\sqrt{2} + 2,$

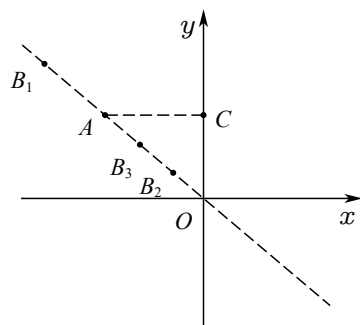
$\therefore (\sqrt{2} - 2)k + 3 = -\sqrt{2} + 2, \therefore k = \frac{3\sqrt{2} + 4}{2},$

当 $x = -\sqrt{2} - 2$ 时, $y = \sqrt{2} + 2,$

$\therefore (-\sqrt{2} - 2)k + 3 = \sqrt{2} + 2, \therefore k = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2},$

当 $AB = BC$ 时, 点 $B(-1, 1), \therefore -k + 3 = 1, \therefore k = 2,$

综上所述: $k = \frac{4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ 或 $k = 2$;



(3) 若将函数 $y = x^2 + 2x$ 的图象在直线 $y = m$ 下方的部分沿直线 $y = m$ 翻折, 翻折后的部分与图象的其余部分组成了一个新的图象. 当该图象上恰有 3 个“好点”时, 求 m 的值.

【解答】(3) \because 函数 $y = x^2 + 2x$ 的图象在直线 $y = m$ 下方的部分沿直线 $y = m$ 翻折,

\therefore 翻折后的抛物线解析式为 $y = -x^2 - 2x + 2m,$

$\because y = x^2 + 2x$ 的图象上有两个“好点”: $(0, 0)$ 和 $(-3, 0),$

当 $y = -x^2 - 2x + 2m$ 上有一个“好点”时,

把 $y = -x$ 代入得, $-x = -x^2 - 2x + 2m,$

化简整理得, $x^2 + x - 2m = 0,$

$\therefore \Delta = 1 + 4m = 0,$

$\therefore m = -\frac{1}{4},$

特别地, 当 $(0, 0)$ 在 $y = -x^2 - 2x + 2m$ 上时, 即 $m = 0$

此时 $-x^2 - 2x = -x,$

$x = 0$ 或 $x = -1,$

这时也有三个“好点”: $(-3, -3), (0, 0), (-1, -1),$

$\therefore m = -\frac{1}{4}$ 或 $0.$

【点评】二次函数的学习进入尾声, 几何变换是所有压轴中的难点, 其实曲直相交交点的个数处理习惯后并不难(用 Δ)但是二次函数关于某直线翻折问题是难点.